学校编码：10384　　　　分类号______密级______
学号：19020131152682　　　　UDC______

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

路上和圈上的半厌恶型设施选址问题的机制设计

Mechanisms Design for Semi-Obnoxious Facility Games On a Path and On a Circle

指导教师姓名：　刘龙城
专　业　名　称：　运筹学与控制论
论文提交日期：　2016 年 5 月
论文答辩时间：　2016 年 5 月
学位授予日期：

答辩委员会主席：__________
评　　阅　　人：__________

2016 年　4　月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘要

这篇论文讨论的是网络上的半厌恶型设施博弈问题. 所谓的半厌恶是指有一组参与者, 每个参与者对设施有不同的偏好，其中一些参与者喜欢这个设施, 另外的参与者讨厌这个设施. 博弈规则如下: 首先, 每个参与者报告他们的位置和偏好, 然后，政府通过已知的机制选出放置设施的位置. 我们希望设计满足如下条件的机制, 第一, 机制具有防策略性, 也就是说参与者谎报他们的位置或偏好不会从中获益, 更进一步, 机制具有防团策略性, 也就是说, 任何若干参与者组成的团体, 团体中的成员谎报他们的位置或偏好, 至少有一个成员不会从中获益; 第二, 机制导出的社会福利要尽可能的接近最大的社会福利. 这篇论文具体讨论了两种模型: 网络是一条路和网络是一个圈. 当网络是一条路的时候, 我们首先给出了一个具有防团策略性和竞争比为3的紧的确定型机制, 接着我们给出了一个具有防团策略性和竞争比为2的紧的随机机制; 当网络是一个圈的时候, 我们首先给出了一个具有防团策略性和竞争比为3的紧的确定型机制, 接着我们给出了一个具有防团策略性和竞争比为2的紧的随机机制.

关键词：算法机制设计; 防策略性; 设施博弈; 竞争比; 社会福利.

Abstract

In this thesis, we consider a semi-obnoxious facility game on networks, where a set of strategic agents have different preference for the facility, some of them love the facility and others hate the facility. The procedure is as following: the agents first report their locations and preference, and then a mechanism select a place for the facility. We wish to design mechanisms that are strategy-proof, in the sense that a coalition of agents cannot all benefit by lying, or even better, group strategy-proof, in the sense that a coalition of agents cannot all benefit by lying. At the same time, the mechanisms must provide a small competitive ratio with respect to the social welfare. Two models are considered: the network is a path and the network is a circle. First, for the network is a path, We present a group strategy-proof deterministic mechanism with tight competitive ratio of 3 and a group strategy-proof randomized mechanism with tight competitive ratio of 2. Then for the network is a circle, we present a group strategy-proof deterministic mechanism with tight competitive ratio of 3 and a group strategy-proof randomized mechanism with tight competitive ratio of 2.

Key Words: Algorithm Mechanisms design; Strategy proof; Facility game; Approximation ratio; Social welfare.

目　录

Contents

第一章　绪论

1.1 运筹学简介

现代运筹学的起源可以追溯到几十年前, 在某些组织的管理中最先试用科学手段的时候. 可是, 普遍认为, 运筹学的活动是从二次世界大战初期的军事任务开始的. 当时迫切需要把各项稀少的资源以有效的方式分配给各种不同的军事经营及在每一经营内的各项活动, 所以美国及随后美国的军事管理当局都号召大批科学家运用科学手段来处理战略与战术问题, 实际上这便是要求他们对种种（军事）经营进行研究, 这些科学家小组正是最早的运筹小组. 第二次世界大战期间, 运筹学成功地解决了许多重要作战问题, 为运筹学后来的发展铺平了道路.

当战后的工业恢复繁荣时, 由于组织内与日俱增的复杂性和专门化所产生的问题, 使人们认识到这些问题基本上与战争中所曾面临的问题类似, 只是具有不同的现实环境而已, 运筹学就这样潜入工商企业和其它部门, 在50年代以后得到了广泛的应用. 美国于1952年成立了运筹学会, 世界其它国家也先后创办了运筹学会与期刊, 并与1959年成立了国际运筹学协会. 20世纪50年代中期钱学森、许国志等教授将运筹学由西方引入我国, 并结合我国的特点在国内推广应用.

运筹学作为一门用来解决实际问题的学科, 在处理千差万别的各种问题时, 一般有以下几个步骤: 确定目标、制定方案、建立模型、制定解法. 随着科学技术和生产的发展, 运筹学已渗入很多领域里, 发挥了越来越重要的作用. 运筹学本身也在不断发展, 线性规划、非线性规划、整数规划、组合规划、图论、网络流、决策分析、排队论、可靠性数学理论、库存论、博弈论、搜索论、模拟等. 运筹学有广阔的应用领域, 它已渗透到诸如服务、搜索、人口、对抗、控制、时间表、资源分配、厂址定位、能源、设计、生产、可靠性等各个方面. [1]

1.2 算法机制设计简介

机制设计理论是用来设计博弈规则, 使得参与博弈的各方按照设计者所设计的规则去运行, 能得到均衡的结果; 而传统的博弈论关心的是博弈的最终均衡结果是什么. 机制设计讨论的问题是, 对于事先给定的目标, 在信息不完全, 参与者根据自身利益, 自愿交换信息等决策条件下, 是否存在某个机制, 使得每个参与者的利益和事先制定的目标一致. 例如, 在一场博弈中, 有 n 个参与者, 每个人都有一些自己才知道的秘密信息, 对于博弈的组织者, 有既定的目标, 希望根据大家所上报的秘密信息, 来达到目标，对于每个参与者而言都拥有自己的收益函数, 他们会根据自己的个人收益, 来决定上报真实的信息还是虚假的信息, 而作为组织者而言, 就是设计有效的机制, 使得目标效益尽可能的大.

算法就是计算的方法, 根据提前设定的一组规则, 求解问题. 计算机中, 是指用计算机求解问题的步骤, 具体分为前期思考求解步骤的理论性的算法和后期编写程序的实际性的算法. 随着计算机的发展和大数据时代的来临, 算法的重要性也日益增强.

算法机制设计领域, 起源于 Nisan 和 Ronen [2]为解决最优博弈问题, 如任务排序和资源分配问题所做的研究, 在这些优化问题中, 输入的最初信息来源于每个参与者报告的私人信息, 而每个参与者都是自私的, 即他们会为了获得更多的利益而谎报私人信息, 最终导致输出的结果与最优结果相差甚远. 一个机制就是一个可以输出结果的函数, 给定参与者的报告信息, 目标是设计一个机制, 不仅迫使所有参与者讲真话而且使目标函数最优.

随着人们对世界的认识, 逐渐发现, 现存的一小部分问题是在多项式时间内可解的, 但大部分问题都是ＮＰ－完全问题, 解决这类问题主要有以下方法: （1）只对某个问题的特例求解（2）用动态规划或是分支定界法求解（3）运用概率的方法（4）运用启发式方法（5）求问题的近似解, 在实际生活中, 许多数据的获得就是近似的, 因而对于许多问题求得近似解就能很好地解决问题.

定义 1.1 如果给定问题 II 的任何实例 $I \in D_{II}$ ， 算法 A 都可以找到一个可行解 $\sigma \in S_{II}(I)$ 且其目标值 $m_{II}(I,\sigma) = OPT_{II}(I)$, 那么称算法 A 为该问题 II 的精确算法.

为了便于定义近似算法, 用 $A(I)$ 表示算法 A 求解实例 I 所得的目标函数值, 即 $A(I) = m_{II}(I,\sigma)$, 其中 σ 为算法 A 找到的一个可行解 $\sigma \in S_{II}(I)$.

定义 1.2 如果 II 为一个极小或极大化问题, 定义比率 $R_A(I)$ 为: 当 II 为极小问题时, $R_A(I) = \frac{A(I)}{OPT(I)}$, 当 II 为极大化问题时 $R_A(I) = \frac{OPT(I)}{A(I)}$. 当 $OPT(I) = 0$ 时, 上式中第一种情况应理解为 $A(I) = R_A OPT(I)$, 当 $A(I) = 0$ 时, 上式中第二种情况应理解为 $OPT(I) = A(I)R_A(I)$. 若对一切 $I \in D_{II}$, 都有 $R_A(I) \le \delta$, 则称算法 A 是竞争比为 δ 的近似算法. 由此, 我们可以看出:

（1）所有的竞争比均为 $\delta \ge 1$

（2）若竞争比 δ 越接近 1, 则表明该近似算法的性能越好

（3）当竞争比为 $\delta = 1$ 时, 竞争比为 δ 的近似算法就成为其精确算法.[3]

社会科学文献中很早就有设施博弈方面的研究, 对于一些度量空间已经有一些防策略性的机制, 例如, 当设施位于一条路上[4–7]或者是位于一个一般的网络上[8]. 对于经典的设施博弈, 居民都希望离设施尽可能的近, 在过去的几十年有许多相关的研究工作. 这类问题有两个需要最优化的目标: 社会总成本和最大成本. 关于社会总成本, 2009年Procaccia 和 Tennenholtz [9]研究了当所有参与者位于一条路上时的设施博弈问题. 如果在这条路上, 只建立一座设施, 则存在一个具有防团策略性的最优机

制; 如果在这条路上要建立两座设施, 他们给出了一个上界为 $n-2$ 和一个下界为 1.5 的具有防策略性的确定型机制. 对于最大成本, 2010年Lu 等[10]给出了上界为 $\frac{n}{2}$ 和下界为 1.045 的具有防策略性的随机机制, 2010年Lu 等[11]设计了一个具有防策略性的确定型机制, 而对于一般的度量空间, 设计了一个竞争比为 4 的随机机制. 对于居民位于一个圈上且只有一个设施的博弈问题, 2007年Schummer 和Vohra [12]证明不存在小于 $\Omega(n)$ 的防策略性确定型机制. 但是Alon 等在2009年[13]年设计了一个简单的竞争比为 $2-\frac{2}{n}$ 的具有防团策略性的随机机制. 对于目标函数为最大成本的一个设施博弈, 2009年Procaccia 和Tennenholtz [9]研究了参与者均位于一条路上时的情况, 给出了具有防团策略性的竞争比为 2 的确定型机制和具有防团策略性的竞争比为 $\frac{3}{2}$ 的随机机制, 他们也给出了具有防策略性的确定型和随机机制. 对于网络是一个圈时的情况, 2009年 Alon 等[13]给出了一个竞争比为 $\frac{3}{2}$ 的紧的“混合”防策略性随机机制. 他们也证明了当网络是一个树状图时不存在竞争比小于 $2-o(1)$ 的随机机制. 2013年Cheng 等[14]研究了厌恶型的设施博弈问题, 他们首先研究了当参与者均位于一条路上时的情况, 给出了一个具有防团策略性的竞争比为 3 的确定型机制和一个具有防团策略性的竞争比为 $\frac{3}{2}$ 的随机机制. 其次研究了当参与者均位于一个圈和一个树状图上时的情况, 分别给出了具有防团策略性竞争比为 3 的确定型机制. 2014年, Zhang 和Li[15]研究了当参与者均位于一条路上的带有权重的设施选址博弈问题, 他们首先证明了无权重时的具有防团策略性的机制依然是有权重博弈问题的最优结果, 并且给出了参与者均喜欢此设施, 目标函数为社会效用和最小效用时的具有紧的竞争比下界和紧的竞争比上界. 他们也给出了参与者均讨厌此设施, 目标函数为社会效用时的竞争比下界和竞争比上界, 以及目标函数为最小值时的竞争比下界.

1.3 本文研究思路和研究内容

这篇论文, 我们讨论了一种新的设施博弈, 称之为半厌恶设施博弈. 一个典型的例子是: 政府计划在一所城市中新建一个高铁站服务于全体居民. 对于这个即将建立的高铁站, 一部分居民希望高铁站离自己所居住地点越近越好, 因为这部分市民经常乘坐高铁出行: 另一部分居民希望高铁站离自己居住的地点越远越好, 因为他们极少乘坐高铁出行, 而且高铁站会给附近居民的日常生活带来很多不利的影响. 首先, 所有的居民向政府报告他们居住的地址和对高铁站的偏好（喜欢或讨厌）, 然后，政府根据居民报告的信息, 得出建立高铁站的合适位置. 对于喜欢高铁站的居民而言, 他们所获得的效用为城市的直径距离值减去高铁站与居住地点之间的距离值; 对于不喜欢高铁站的居民而言, 他们所获得的效用为, 高铁站与居住地点之间的距离值. 社会福利被定义为, 所有居民的效用之和, 因此, 政府的目标是, 使社会福利最大化. 我们的模型与传统设施选址的区别在于, 每个居民的信息都是私人信息, 居民为了使私人效用最大化, 可能会谎报位置或偏好. 半厌恶设施博弈的目标是设计一个基于居民所报告信息就可以得出放置设施位置的机制, 而且此机制具有防团策略性, 与此同时产生一个小的竞

争比. 一个机制具有防团策略性, 如果对于任何一个若干参与者组成的团体, 成员们谎报他们的信息, 至少有一个参与成员不会从谎报信息中获益.

1.4 本文组织结构

本文的具体结构如下, 第一章: 主要介绍了运筹学的发展历史, 算法机制设计简介; 第二章: 主要包括整篇文章所需的预备内容和整体思想, 所使用的目标函数和符号等; 第三章: 主要讨论了当参与者均位于一条路上时的情况, 分别给出了一个具有防团策略性的紧的竞争比为 3 的确定型机制和一个具有防团策略性的紧的竞争比为 2 的随机机制; 第四章: 主要讨论了当参与者均位于一个圈上时的情况, 分别给出了一个具有防团策略性的紧的竞争比为 3 的确定型机制和一个具有防团策略性的紧的竞争比为 2 的随机机制; 第五章: 对本篇文章进行了总结和展望.

第二章　预备内容

集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 为参与者集, $G=(V,E)$（V 为顶点集, E 为边集）为一般网络. 当网络是一条路时, 不失一般性, 我们假设路的左端点为 0, 右端点为 2, 因此我们可以把路看成一段 $[0,2]$ 的区间 I. 区间 I 上的任意两点 x , y 之间的距离为, $d(x,y)=|x-y|$.

一个闭环 G 可以看成是两条端点相互重合的路形成的, 如果图 G 是一个闭环, 我们把这个闭环叫做圈. 对于圈 G, 圈的长度 D 被定义为边的总长度, 也即圈的周长, 为了使问题简单化, 我们把圈的长度 D 标准化为 1, 把整个圆参数化, 使得 G 上的任意一点 x 都可以表示成 $[0,1]$ 之间的一个实数, 且点 $x=1$ 和点 $x=0$ 表示相同的位置. 对于 G 上的任意一点 x, 我们用 $\tilde{x}$ 表示其在圈 G 上的相对点, 也就是说 $d(x,\tilde{x})=\frac{1}{2}$, 具体图示见图 2.1.

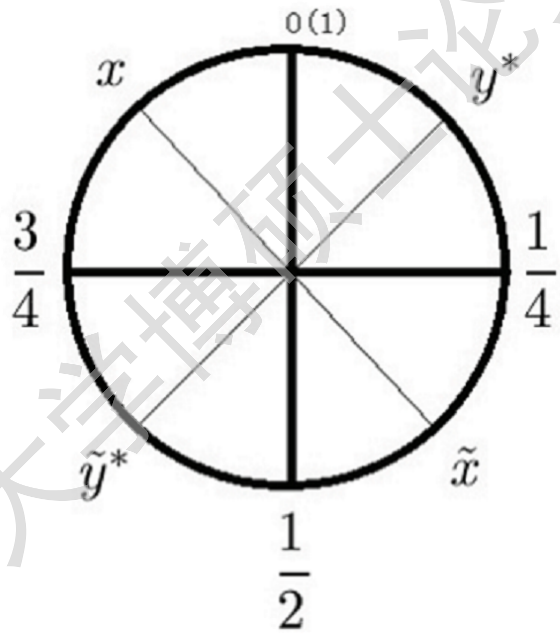

图 2.1　圈G

参与者 i 报告其具体位置为图 G 上的一点 x_i, 集合 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是参与者的位置向量, 参与者 i 的偏好 p_i 要么是 h（讨厌此设施）要么是 l（喜欢此设施）, 集合 $P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)(p_i\in\{h,l\})$ 是参与者的偏好向量. 我们用向量 (X,P) 表明所有参与者的信息.

在半厌恶设施博弈中, 一个确定型机制基于给定的位置向量 X 和偏好向量 P 输出设施的位置, 也可以看作一个函数 $f:(X,P)\to G$. 假设设施的位置可表示为

$y = f(X, P)$. 如果参与者 i 讨厌此设施, 那么参与者 i 的效用是他/她的居住地与设施之间的距离值, 也即,

$$u(f(X, P), (x_i, p_i)) = d(y, x_i),$$

如果参与者 i 喜欢此设施, 那么参与者 i 的效用等于图 G 的直径减去他/她的居住地与设施之间的距离, 也即,

$$u(f(X, P), (x_i, p_i)) = \phi - d(y, x_i),$$

ϕ 是图 G 的直径, 也即, 图 G 上任意两点之间距离的最大值.

随机机制可以看成一个函数 $f : (X, P) \to \Delta(I)$, 其中 $\Delta(I)$ 是设施在 I 上的分布. 此时参与者 i 的效用是基于上述分布的他/她的期望效用, 也即, 如果参与者 i 讨厌此设施, 那么,

$$u(f(X, P), (x_i, p_i)) = E_{y \sim f}[d(y, x_i],$$

如果参与者 i 喜欢此设施, 那么,

$$u(f(X, P), (x_i, p_i)) = E_{y \sim f}[\phi - d(y, x_i],$$

集合 $X_{-i} = (x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ 为不包含参与者 i 居住位置 x_i 的其余 n 个参与者的位置向量, 集合 $P_{-i} = (p_1, p_2, \cdots, p_{i-1}, p_{i+1}, \cdots, p_n)$ 为不包含参与者 i 偏好 p_i 的偏好向量. 参与者集 $S \in N$, X_s 表示 S 中参与者的位置向量, X_{-s} 表示除去 S 中参与者, 剩余参与者的位置向量, P_s 和 P_{-s} 表示相对应集合的偏好向量, 因此我们得到三个等价的概念: $(X, P) = \langle (x_i, X_{-i}), (p_i, P_{-i}) \rangle = \langle (X_s, X_{-s}), (P_s, P_{-s}) \rangle$. 为书写方便, 改写下列等式为,

$$f(x_i, X_{-i}, p_i, P_{-i}) = f(\langle (x_i, X_{-i}), (p_i, P_{-i}) \rangle) \ ,$$

$$f(X_s, X_{-s}, P_s, P_{-s}) = f(\langle (X_s, X_{-s}), (P_s, P_{-s}) \rangle) \ ,$$

机制 f 基于位置向量 X 和偏好向量 P 所获得社会福利被定义为 n 个参与者的效用之和:

$$SW(f, (X, P)) = \sum_{i=1}^{n} u(f(X, P), (x_i, p_i)),$$

若机制 f 为随机机制, 那么社会效用是一个期望值.

对于半厌恶设施博弈问题, 我们希望设计的机制不仅具有防策略性, 而且使社会福利最大化. 给出一个位置向量 X 和一个偏好向量 P, 对于给定点 $y \in G$ 的目标函数

被定义为:

$$F_{(X,P)}(y) = \sum_{i \in H} d(x_i, y) + \sum_{i \in L} [\phi - d(x_i, y)],$$

其中集合 H 为讨厌此设施的参与者集合, 集合 L 为喜欢此设施的参与者集合.

$OPT(X, P)$ 表示目标函数的最优值, 也即, $OPT(X, P) = max_{y \in G} F_{(X,P)}(y)$. 我们说机制 f 有 ρ 竞争比, 如果对于所有的信息向量 (X, P) , 有,

$$OPT(X, P) \leq \rho SW(f, (X, P)).$$

接下来, 我们正式给出防策略性和防团策略性的定义.

定义 2.1 一个机制具有防策略性, 如果没有参与者可以从谎报信息（包括只谎报位置或只谎报偏好或同时谎报位置和偏好）中获益. 给定参与者 i, 信息向量 $(X, Y) = (x_i, p_i), (X_{-i}, P_{-i})$ 和参与者 i 谎报其信息为 $(x_i, p_i)'$, 满足,

$$u(f((x_i, p_i), (X_{-i}, P_{-i})), (x_i, p_i)) \geq u(f((x_i, p_i)', (X_{-i}, P_{-i})), (x_i, p_i)).$$

定义 2.2 一个机制具有防团策略性, 如果对于任意的参与者集合, 集合中的成员谎报其信息, 至少有一个成员不会从中获益. 给定非空参与者集 $S \subseteq G$, 信息向量 $(X, P) = (X_s, X_-s, P_s, P_-s)$, S 中的参与者谎报其信息为 $(X_{-s}, P_{-s})'$, 则存在参与者 $i \in S$, 满足,

$$u(f(((X_s, P_s), (X_{-s}, P_{-s})), (x_i, p_i)) \geq u(f((X_s, P_s)', (X_{-s}, P_{-s})), (x_i, p_i)).$$

第三章　当网络是一条路时的机制设计

3.1 确定型机制设计

在这一章, 我们讨论的是路上的施博弈问题. 给定信息向量 (X,P)，$x_i \in [0,2], p_i \in \{h,l\}$. 为简单起见, 我们令集合 H 为讨厌此设施的参与者组成的集合, L 为喜欢此设施的参与者组成的集合, $H_1 = \{i|x_i \in [0,1] \bigcap i \in H\}$, $H_2 = \{i|x_i \in (1,2] \bigcap i \in H\}$, $L_1 = \{i|x_i \in [0,1] \bigcap i \in L\}$, $L_2 = \{i|x_i \in (1,2] \bigcap i \in L\}$, $|H| = h, |L| = l, |H_1| = h_1, |H_2| = h_2, |L_1| = l_1, |L_2| = l_2, n_1 = h_1 - l_1, n_2 = h_2 - l_2$.

在传统的厌恶型设施选址问题中, 当 n 个参与者位于区间 $[0,2]$ 中, 两个端点之一必定是最优设施位置. 但是, 这个结论在半厌恶设施博弈问题中不成立, 譬如下面的特殊情况, 当 $H = \emptyset$, 也即, 所有的参与者均喜欢此设施, 很容易就得出, 设施的最优位置应该位于参与者位置之间. 例, 只有两个参与者, 参与者 1 和参与者 2, 两个参与者均喜欢此设施, 且 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$. 设施的最优位置应为 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ 中的任意一点.

下面, 我们给出了一个具有防团策略性的确定型机制和一个具有防团策略性的随机机制.

机制1. 若所有的参与者均位于一条路上, 给定信息向量 (X,P), $x_i \in [0,2], p_i \in \{l,h\}$. 如果 $n_1 \geq n_2$, 输出 $y = 2$; 否则, 输出 $y = 0$.

定理 3.1 对于所有参与者均位于一条路上的唯一设施博弈, 机制 1 是一个具有防团策略性且竞争比为 3 的紧的确定型机制.

证明: 给定信息向量 (X,P), $x_i \in [0,2], p_i \in \{h,l\}$. 我们首先证明机制 1 具有防团策略性. $S \subseteq N$ 是部分参与者集, 我们需要证明的是, 当 S 中的参与者谎报信息, 至少一个参与者 $i \in N$ 不会从中获益. 不失一般性, 我们假设 $n_1 \geq n_2$, $n_1^{'}$ 和$n_2^{'}$ 分别表示为 S 中的参与者谎报其信息后形成的新的相关人数. 如果$n_1^{'} \geq n_2^{'}$, 那么S中的参与者谎报其信息后, 机制 1 输出的位置依然是是 $y^{'} = y = 2$, 则对于任意的参与者 $i \in S$, $u(y,x_i) = u(y^{'},x_i)$, 也即, 所有的参与者均未从谎报信息中获益. 如果 $n_1^{'} < n_2^{'}$, 那么 S 中的参与者谎报其信息后, 机制 1 输出的位置是 $y^{'} = 0$. 在这种情况下, S 中至少存在一个参与者 i 谎报其信息为下面的两种谎报方式之一:

（1）参与者 i 的真实居住位置为 $x_i \in [0,1]$ 且偏好为 $p_i = h$, 仅仅谎报其居住位置为 $x_i{'} \in (1,2]$, 或仅仅谎报其偏好为 $p_i^{'} = l$. 由此得到 $u(y^{'},x_i) = x_i \leq 1 \leq 2 - x_i = u(y,x_i)$.

（2）参与者 i 的真实居住位置为 $x_i \in [1,2]$ 且偏好为 $p_i = l$, 仅仅谎报其居住位置为 $x_i{'} \in (0,1]$, 或仅仅谎报其偏好为 $p_i^{'} = h$. 由此得到 $u(y^{'},x_i) = 2 - x_i \leq 1 \leq x_i = u(y,x_i)$.